Leíró Logikai Programozás

Szeredi Péter
szeredi@cs.bme.hu
Lukácsy Gergely
lukacsy@cs.bme.hu

BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2006. október 17.

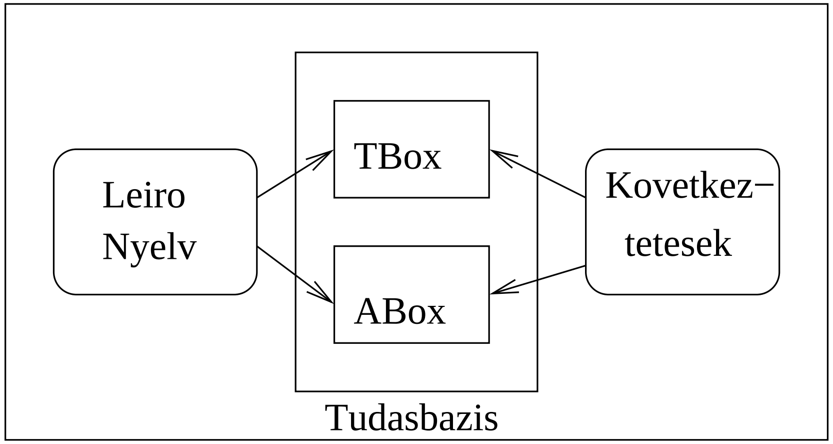
Leíró Logika+ Logikai Programozás = Leíró Logikai Programozás

- Leíró Logika (Description Logic, DL): tudásreprezentációs formalizmus
  - terminológiai axiómák: hierarchikus fogalmi rendszerek (ontológiák) definiálására
    - Anya = olyan Nőnemű Ember, akinek létezik gyereke
  - adataxiómák: konkrét egyedekről szóló tudás
    - Éva Ember, Éva Nőnemű, Éva gyereke Káin $\Longrightarrow$ Éva Anya
  - lényegében az elsőrendű logika (FOL) része, leggyakrabban használt változatai *eldönthetőek*
  - a szemantikus technológiák, pl. a szemantikus világháló matematikai alapját képezik
- Logikai Programozás (Logic Programming, LP): programozási paradigma, lásd pl. Prolog
  - a program: logikai állítások halmaza (többnyire Horn-klózok: szabályok, tényállítások)
    - `NSz unokája U` ha létezik olyan `Sz`, hogy `NSz gyereke Sz` és `Sz gyereke U`.
    - `éva gyereke káin`.
  - a program futása: következtetési folyamat
- Leíró Logikai Programozás (Description Logic Programming, DLP): DL+LP ötvözése
  - az LP segítségével a DL fogalmakra vonatkozó szabályok fogalmazhatók meg
  - DL következtetők megvalósításában a LP módszerei hatékony módon használhatók

Az előadás szerkezete

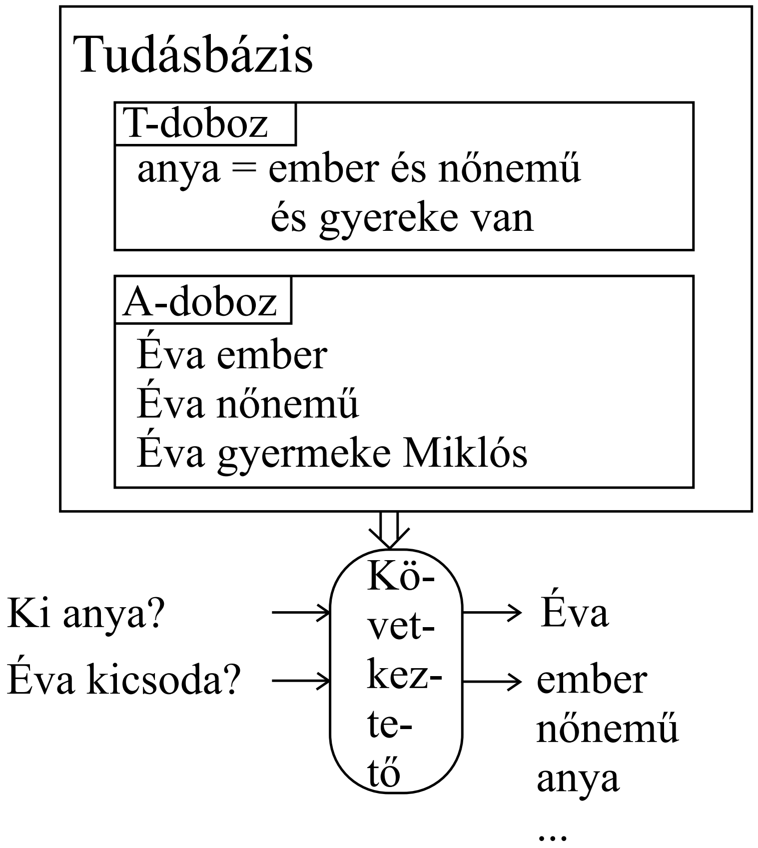
- Leíró Logikák bemutatása
  - Terminológiai dobozok (T-dobozok) és adatdobozok (A-dobozok)
  - Szintaxis, szemantika
  - Nyelvváltozatok: $\mathcal{AL} \rightarrow \mathcal{SHIQ} \rightarrow \ldots$
  - Leíró logikai következtetési feladatok
  - Nyílt és zárt világ szemlélet
  - Fejlettebb Leíró Logikák
  - Tabló alapú következtetés Leíró Logikákra
- Leíró Logikák megvalósítása Prolog alapokon
  - Adatkövetkeztetés $\mathcal{ALC}$ nyelven T-doboz nélkül
  - Adatkövetkeztetés megszorított $\mathcal{ALC}$ nyelven T-dobozokkal
  - Összehasonlítás a tabló alapú módszerekkel

Leiró logikák mint a tudásreprezentáció eszközei

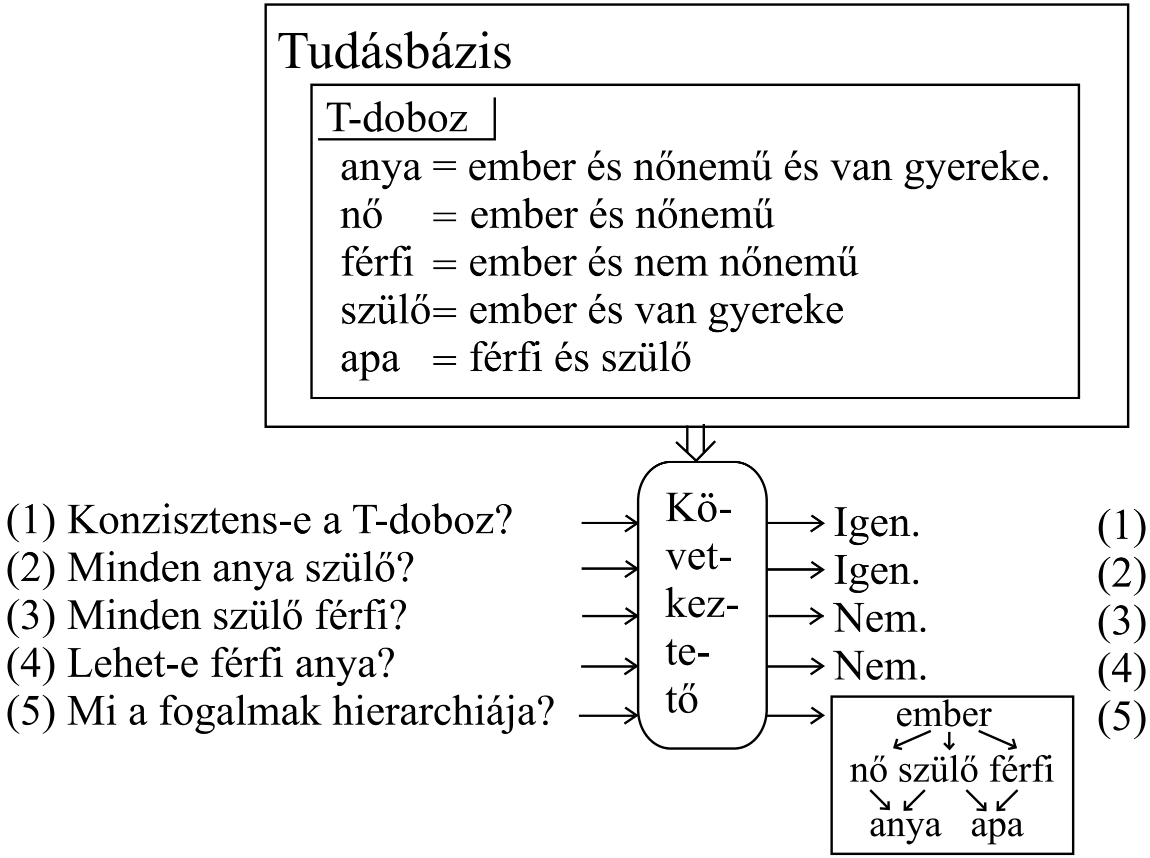


- Tudásbázis (KB, knowledge base) = T-doboz (TBox) + A-doboz (ABox):
- T-doboz = terminológiai doboz = terminológiai axiómák halmazaza:
  fogalmakról (és szerepekről) szóló állítások (az anya, aki nőnemű és van gyereke)
- A-doboz = adatdoboz = adataxiómák halmaza: tudásunk az objektumokról (Éva anya)
- Következtetések: T-doboz: egy fogalomleírás kielégíthető (értelmes), annak megállapítása hogy az egyik fogalom egy másik általánosítása (fogalom-hierarchia),
  A-doboz: egy objektum egy fogalom példánya, egy fogalomleírást kielégítő objektumok, ellentmonások felfedezése.

Példa leíró logikai következtetésre



Példa tiszta T-doboz következtetésre



Példák terminológiai axiómákra

Az Anya nem más, mint olyan Ember aki Nőnemű és van gyereke.

$$\text{Anya} \equiv \text{Ember} \sqcap \text{Nőnemű} \sqcap \exists \text{gyereke}.\top$$

Minden Tigris Emlős.

$$\text{Tigris} \sqsubseteq \text{Emlős}$$

A boldog emberek gyerekei is boldogak.

$$\text{Boldog} \sqcap \text{Ember} \sqsubseteq \forall \text{gyereke}.\text{Boldog}$$

A gyermektelen emberek boldogak

$$\forall \text{gyermeke}.\bot \sqcap \text{Ember} \sqsubseteq \text{Boldog}$$

A gyereke viszonyban levők egyben leszármazottja viszonyban is vannak.

$$\text{gyereke} \sqsubseteq \text{leszármazottja}$$

A szülője kapcsolat a gyereke kapcsolat megfordítottja (inverze).

$$\text{szülője} \equiv \text{gyereke}^{-}$$

A leszármazottja reláció tranzitív

$$\text{Trans}(\text{leszármazottja})$$

Az AL nyelv szintaxisa

- Az $\mathcal{AL}$ fogalomkifejezések (röviden fogalmak) szintaxisa:

$C \rightarrow$	$A \mid$	(atomi fogalom, fogalomnév)	egy halmaz, pl: Ember
	$\top \mid$	(tetőjel, top)	az összes objektum halmaza
	$\bot \mid$	(fenékjel, bottom)	az üres halmaz
	$\neg A \mid$	(atomi negálás)	
	$C \sqcap C \mid$	(metszet)	
	$\forall R.C \mid$	(értékkorlátozás)	azon egyedek, amelyek minden R-je C-beli
	$\exists R.\top \mid$	(egyszerű létezési korlátozás)	azon egyedek, amelyeknek létezik R-je

A atomi fogalom, C, D összetett fogalmak

- Példák:

Ember $\sqcap$ $\neg$Nőnemű
Ember $\sqcap$ $\forall$gyereke.Nőnemű
Ember $\sqcap$ $\exists$gyereke.$\top$

Az AL nyelv szemantikája

- Interpretáció: $\mathcal{I} =< \Delta, I >$
  Δ az objektumok halmaza (nem lehet üres!), I egy függvény, amely a fogalmakhoz és a szerepekhez halmazokat és relációkat rendel.

$$
\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= \Delta \\
\bot^{\mathcal{I}} &= \emptyset \\
(\neg A)^{\mathcal{I}} &= \Delta \setminus A^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} &= C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
\forall (R.C)^{\mathcal{I}} &= \{a \in \Delta | \forall b. \langle\, a, b \,\rangle \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\} \\
\exists (R.\top)^{\mathcal{I}} &= \{a \in \Delta | \exists b. \langle\, a, b \,\rangle \in R^{\mathcal{I}}\}
\end{aligned}
$$

- Az interpretációs jelölés egyszerűsítése: ha adott $\mathcal{I}$ ahol $\mathcal{I} =< \Delta, I >$, akkor a Δ alaphalmaz helyett $\Delta^{\mathcal{I}}$-t, C^I helyett $C^{\mathcal{I}}$-t, R^I helyett $R^{\mathcal{I}}$-t írunk.
- Fogalmak ekvivalenciája: C és D ekvivalens ($C \equiv D$), ha $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ minden $\mathcal{I}$ interpretációra.
  pl: $\forall$gyereke.Nőnemű $\sqcap$ $\forall$gyereke.Diák $\equiv$ $\forall$gyereke.(Nőnemű $\sqcap$ Diák)

Az AL nyelvcsalád: az U, E, N, C nyelvkiterjesztések

További konstruktorok

- Unió: $C \sqcup D$
  $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$ $\quad (\mathcal{U})$
- Teljes létezési korlátozás: $\exists R.C$
  $(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} | \exists b.\langle a, b \rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}$ $\quad (\mathcal{E})$
- Számosság-korlátozások (nem-minősítettek): $\geqslant nR$ és $\leqslant nR$
  $(\geqslant nR)^{\mathcal{I}} = \left\{ a \in \Delta \mid \quad \left| \left\{ b \mid \langle a, b \rangle \in R^{\mathcal{I}} \right\} \right| \geq n \right\}$ $\quad (\mathcal{N})$
  $(\leqslant nR)^{\mathcal{I}} = \left\{ a \in \Delta \mid \quad \left| \left\{ b \mid \langle a, b \rangle \in R^{\mathcal{I}} \right\} \right| \leq n \right\}$

  Figyelem: $\geqslant nR.C$ (például az hogy valakinek van legalább 3 kékszemű gyereke) már minősített korlátozás, ezt az $\mathcal{N}$ nyelvkiterjesztés már nem fedi le.
- (Teljes) negálás: $\neg C$
  $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta \setminus C^{\mathcal{I}}$ $\quad (\mathcal{C})$
- pl: $\textsf{Ember} \sqcap (\leqslant 1\textsf{gyereke} \sqcup (\geqslant 3\textsf{gyereke} \sqcap \exists \textsf{gyereke}.\textsf{Nőnemű}))$.
- Bizonyítható, hogy $\mathcal{ALUE}$ és $\mathcal{ALC}$ azonos kifejező erejű, és így
  ($\mathcal{ALC} = \mathcal{ALCU} = \mathcal{ALCE} = \mathcal{ALCUE} = \mathcal{ALUE}$).

A leíró nyelvek és az elsőrendű logika

A fogalmak átírhatók elsőrendű logikai kifejezésekké:

- Az átírás minden C fogalomkifejezésnek egy $\Phi_C(x)$ formulát feleltet meg.
- Az atomi fogalmak(A) és szerepek(R) unáris illetve bináris predikátumok lesznek ($A(x), R(x,y)$).
- A metszetet, az uniót, a negálást egyszerűen a logikai megfelelőjére írjuk át.
- A különféle korlátozások a következő módon íródnak át:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\exists R.C}(y) &= \exists x.\,(R(y,x) \land \Phi_C(x)) \\
\Phi_{\forall R.C}(y) &= \forall x.\,(R(y,x) \rightarrow \Phi_C(x)) \\
\Phi_{\geqslant nR}(x) &= \exists y_1,\ldots,y_n.\left(R(x,y_1) \land \cdots \land R(x,y_n) \land \bigwedge_{i<j} y_i \neq y_j\right) \\
\Phi_{\leqslant nR}(x) &= \forall y_1,\ldots,y_{n+1}.\left(R(x,y_1) \land \cdots \land R(x,y_{n+1}) \rightarrow \bigvee_{i<j} y_i = y_j\right)
\end{aligned}
$$

A SHIQ Leíró Logikai nyelv

- A $\mathcal{SHIQ}$ rövidítés betűinek jelentése
  - $\mathcal{S} \equiv \mathcal{ALC}_{\mathcal{R}^+}$ (a $\mathcal{ALC}$ nyelv kiegészítve tranzitív szerepekkel), azaz egyes szerepekről (pl. őse) kijelenthetjük, hogy tranzitívak.
  - $\mathcal{H} \equiv$ szerephierarchiák. Egy szerephierarchia $R \sqsubseteq S$ alakú állítások halmaza, pl. minden barátja kapcsolat egyben ismerőse kapcsolat is: $\textsf{barátja} \sqsubseteq \textsf{ismerőse}$.
  - $\mathcal{I} \equiv$ inverz szerepek: egy R szerep mellett annak R^- inverzét is használhatjuk, pl. $\textsf{gyereke}^- \equiv \textsf{szülője}$.
  - $\mathcal{Q} \equiv$ minősített számosság-korlátozások, azaz $\leqslant nR.C$ és $\geqslant nR.C$ alakú fogalomkifejezések (az $\mathcal{N}$ nyelvkiterjesztés általánosítása) pl. azon emberek akiknek legalább 3 okos gyereke van: $(\geqslant 3\,\textsf{gyereke}.\textsf{Okos})$
- A $\mathcal{Q}$ minősített számosság-korlátozásokat két lépésben érdemes bevezetni:
  - $\mathcal{F} \equiv$ funkcionális korlátozások, azaz $\leqslant 1R$ és $\geqslant 2R$ alakú fogalomkifejezések
  - általános minősített számosság-korlátozások

Miért pont a SHIQ nyelv?

- A tranzitív szerepek és a szerephierarchiák fontosak a rész-egész kapcsolatokban, az (OO) öröklődési kapcsolatokban
  - Szerepnevek és inverzeik
    - $\mathsf{része}(\mathsf{Autó}, \mathsf{Henger}) \equiv$ Az $\mathsf{Autó}$nak $\mathsf{része}$ a Motor.
    - $\mathsf{tartalmazója}(\mathsf{Henger}, \mathsf{Motor}) \equiv$ A Hengernek $\mathsf{tartalmazója}$ az $\mathsf{Autó}$.
    - „-nek/nak” csak a baloldalon lehet!!!
  - Rész-egész kapcsolatok és inverzeik elnevezése
    - (közvetlen) $\mathsf{épitőeleme}$ (has_component) – $\mathsf{befoglalója}$ (is_component_of)
    - $\mathsf{része}$ (has_part) – $\mathsf{tartalmazója}$ (is_part_of)
      (az előző sorbeli szerepek tranzitív lezárása)
    - példák: $\mathsf{épitőeleme}(\mathsf{Autó}, \mathsf{Motor})$, $\mathsf{épitőeleme}(\mathsf{Motor}, \mathsf{Henger})$, ...
    - ugyanez:$\mathsf{befoglalója}(\mathsf{Motor}, \mathsf{Autó})$, $\mathsf{befoglalója}(\mathsf{Henger}, \mathsf{Motor})$, ...
    - következmény: $\mathsf{része}(\mathsf{Autó}, \mathsf{Henger}) \equiv \mathsf{tartalmazója}(\mathsf{Henger}, \mathsf{Autó})$

Miért pont a SHIQ nyelv? (2)

- Példa: nukleáris reaktorok fogalmi rendszere
  - Axiómák:

    $$\mathsf{befoglalója} \sqsubseteq \mathsf{tartalmazója}$$
    $$\mathsf{Vezérrúd} \sqsubseteq \mathsf{Eszköz} \sqcap \exists\, \mathsf{befoglalója}.\mathsf{Reaktormag}$$
    $$\mathsf{Reaktormag} \sqsubseteq \mathsf{Eszköz} \sqcap \exists\, \mathsf{befoglalója}.\mathsf{Reaktor}$$
    $\mathsf{Trans}(\mathsf{tartalmazója})$ $\equiv$ tartalmazója egy tranzitív reláció

  - A példában kiköveztethető, hogy

    $$\mathsf{Vezérrúd} \sqsubseteq \exists\, \mathsf{tartalmazója}.\mathsf{Reaktor}$$

- Az inverz szerepek lehetővé teszik, hogy a rész-egész kapcsolatokat nmindkét irányban leírjuk, pl. a tartalmazója (is_part_of) mellett használhatjuk a része (has_part) szerepeket.
  - Például definiálhatjuk a VeszélyesReaktor fogalmat így:

    $$\mathsf{Reaktor} \sqcap \exists\, \mathsf{része}.\mathsf{Hibás} \sqsubseteq \mathsf{VeszélyesReaktor}$$

  - Ezután kiköveztethető, hogy

    $$\mathsf{Vezérrúd} \sqcap \mathsf{Hibás} \sqsubseteq \exists\, \mathsf{tartalmazója}.\mathsf{VeszélyesReaktor}$$

Miért pont a SHIQ nyelv? (3)

- A funkcionális korlátozások fontosak az Entity-Relationship fajtájú modellezésben leggyakrabban előforduló 0..1 multiplicitások leírására. Példa:

  $$\textsf{Reaktor} \sqsubseteq \exists\ \textsf{vezérlője}.\textsf{Vezérlőegység} \sqcap (\leqslant\ 1\ \textsf{vezérlője})$$

- A minősített számosság-korlátozásokkal az általános n..m multiplicitások is leírhatók.
- A $\mathcal{SH}$ nyelvre és bővítményeire alkalmazható az ún. belsősítés (internalization) módszer, amellyel a fogalmi axiómák kiküszöbölhetőek.
- Fontos: az $\mathcal{ALIF}$ nyelven és bővítményein (pl. $\mathcal{SHIQ}$-ban) leírhatók olyan fogalmak is, amelyekhez nem létezhet véges interpretáció. Példa:
  - keressük, hogy létezhet-e a $\forall R.\bot$ példánya, ha az iterpretáció kielégíti a $\top \sqsubseteq \exists R.\top \sqcap (\leqslant 1 R^-)$ axiómát.
  - létezhet ilyen interpretáció, de csak végtelen

SHIQ szintaxis: összefoglalás

- Fogalomkifejezések szintaxisa

$C \rightarrow$	A	*atomi fogalom*	$(\mathcal{AL})$
$\mid$	$\top$	*tetőjel – univerzális fogalom*	$(\mathcal{AL})$
$\mid$	$\bot$	*fenékjel – semmis fogalom*	$(\mathcal{AL})$
$\mid$	$\neg C$	*negálás*	$(\mathcal{C})$
$\mid$	$C_1 \sqcap C_2$	*metszet*	$(\mathcal{AL})$
$\mid$	$C_1 \sqcup C_2$	*unió*	$(\mathcal{U})$
$\mid$	$\forall R.C$	*érték-korlátozás*	$(\mathcal{AL})$
$\mid$	$\exists R.C$	*létezési korlátozás*	$(\mathcal{E})$
$\mid$	$(\geqslant n\, R_S.C)$	*minősített számosság-korlátozás*	$(\mathcal{Q})$
		(R_S: egyszerű szerep, nincs tranzitív része)	
$\mid$	$(\leqslant n\, R_S.C)$	*minősített számosság-korlátozás*	$(\mathcal{Q})$

SHIQ szintaxis: összefoglalás (2)

- Szerepkifejezések szintaxisa

$$
\begin{array}{rlll}
R \longrightarrow & R_A & \textit{atomi szerep} & (\mathcal{AL}) \\
| & R^- & \textit{inverz szerep} & (\mathcal{I})
\end{array}
$$

- Terminológiai állítások (axiómák) szintaxisa

$$
\begin{array}{rlll}
T \longrightarrow & C_1 \equiv C_2 & \textit{fogalomegyenlőségi axióma} & (\mathcal{AL}) \\
| & C_1 \sqsubseteq C_2 & \textit{fogalomtartalmazási axióma} & (\mathcal{AL}) \\
| & R_1 \equiv R_2 & \textit{szerepegyenlőségi axióma} & (\mathcal{H}) \\
| & R_1 \sqsubseteq R_2 & \textit{szereptartalmazási axióma} & (\mathcal{H}) \\
| & \mathsf{Trans}(R) & \textit{tranzitívszerep-axióma} & (\mathcal{R}^+)
\end{array}
$$

SHIQ szemantika

- Fogalomkifejezések szemantikája

$$
\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \\
\bot^{\mathcal{I}} &= \emptyset \\
(\neg C)^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}} \\
(C_1 \sqcap C_2)^{\mathcal{I}} &= C_1^{\mathcal{I}} \cap C_2^{\mathcal{I}} \\
(C_1 \sqcup C_2)^{\mathcal{I}} &= C_1^{\mathcal{I}} \cup C_2^{\mathcal{I}} \\
(\forall R.C)^{\mathcal{I}} &= \big\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \quad \forall b.\langle\, a, b\,\rangle \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\big\} \\
(\exists R.C)^{\mathcal{I}} &= \big\{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \quad \exists b.\langle\, a, b\,\rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\big\} \\
(\geqslant n\, R.C)^{\mathcal{I}} &= \big\{\, a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \quad \big|\big\{b \mid \langle\, a, b\,\rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\big\}\big| \geq n \,\big\} \\
(\leqslant n\, R.C)^{\mathcal{I}} &= \big\{\, a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \quad \big|\big\{b \mid \langle\, a, b\,\rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\big\}\big| \leq n \,\big\}
\end{aligned}
$$

- Szerepkifejezések szemantikája

$$
(R^{-})^{\mathcal{I}} = \big\{\langle\, b, a\,\rangle \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle\, a, b\,\rangle \in R^{\mathcal{I}}\big\}
$$

SHIQ szemantika (2)

- Terminológiai axiómák szemantikája

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{I} \models C_1 \equiv C_2 & \Leftrightarrow & C_1^{\mathcal{I}} = C_2^{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I} \models C_1 \sqsubseteq C_2 & \Leftrightarrow & C_1^{\mathcal{I}} \subseteq C_2^{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I} \models R_1 \equiv R_2 & \Leftrightarrow & R_1^{\mathcal{I}} = R_2^{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I} \models R_1 \sqsubseteq R_2 & \Leftrightarrow & R_1^{\mathcal{I}} \subseteq R_2^{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I} \models \mathsf{Trans}(R) & \Leftrightarrow & (\forall a, b, c \in \Delta^{\mathcal{I}})(\langle a, b \rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge \langle b, c \rangle \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow \langle a, c \rangle \in R^{\mathcal{I}})
\end{array}
$$

- $\mathcal{I} \models T$ kétféle módon is kiolvasható: $\mathcal{I}$ kielégíti a T axiómát, ill. $\mathcal{I}$ modellje T-nek.
- Legyen $\mathcal{T}$ egy T-doboz (axiómák egy halmaza)
  - $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ ($\mathcal{I}$ modellje $\mathcal{T}$-nek) $\Leftrightarrow$ ha $\mathcal{T}$ minden axiómájának modellje, azaz minden $T \in \mathcal{T}$ esetén $\mathcal{I} \models T$
  - Egy $\mathcal{T}$ T-doboznak szemantikai következménye egy T axióma: $\mathcal{T} \models T \Leftrightarrow$ ha $\mathcal{T}$ minden modellje kielégíti T-t, azaz minden olyan $\mathcal{I}$ esetén, melyre $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$, fennáll, hogy $\mathcal{I} \models T$

Példa T-dobozra

- Családi kapcsolatok fogalomrendszerét leíró T-doboz:

$$
\begin{aligned}
\text{Nő} &\equiv \text{Ember} \sqcap \text{Nőnemű} \\
\text{Férfi} &\equiv \text{Ember} \sqcap \neg\text{Nő} \\
\text{Anya} &\equiv \text{Nő} \sqcap \exists\text{gyereke.Ember} \\
\text{Apa} &\equiv \text{Férfi} \sqcap \exists\text{gyereke.Ember} \\
\text{Szülő} &\equiv \text{Anya} \sqcup \text{Apa} \\
\text{Nagyanya} &\equiv \text{Anya} \sqcap \exists\text{gyereke.Szülő} \\
\text{SokgyerekesAnya} &\equiv \text{Anya} \sqcap \geqslant 3\text{gyereke} \\
\text{FiúsAnya} &\equiv \text{Anya} \sqcap \forall\text{gyereke.}\neg\text{Nő} \\
\text{Feleség} &\equiv \text{Nő} \sqcap \exists\text{férje.Férfi}
\end{aligned}
$$

Következtetések

- Következtetési feladatok T-dobozokon
  - **Kielégíthetőség**: egy C fogalom kielégíthető a $\mathcal{T}$ terminológia felett, ha létezik $\mathcal{T}$-nek olyan $\mathcal{I}$ modellje, hogy $C^{\mathcal{I}}$ nem üres.
  - **Tartalmazás (Alárendeltség)**: Egy C fogalmat tartalmaz egy D fogalom a $\mathcal{T}$ terminológia felett, ha $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$, azaz $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ teljesül $\mathcal{T}$ minden $\mathcal{I}$ modelljére. Alternatív jelölés: $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$
  - **Ekvivalencia**: A C és D fogalmak ekvivalensek a $\mathcal{T}$ terminológia felett, ha $\mathcal{T} \models C \equiv D$, azaz $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ teljesül $\mathcal{T}$ minden $\mathcal{I}$ modelljében. Alternatív jelölés: $C \equiv_{\mathcal{T}} D$.
  - **Diszjunktság**: Két fogalom diszjunkt a $\mathcal{T}$ terminológia felett, ha $\mathcal{T} \models C \sqcap D \equiv \bot$, azaz $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$ teljesül $\mathcal{T}$ minden $\mathcal{I}$ modelljére.
- Példák: ha $\mathcal{T}$ a családi T-doboz, akkor az alábbi állítások igazak:
  - $\mathcal{T} \models \textsf{Nő} \sqsubseteq \textsf{Ember}$ (*)
  - $\mathcal{T} \models \textsf{Anya} \sqcup \textsf{Apa} \equiv \textsf{Szülő}$
  - $\mathcal{T} \models \textsf{Nő} \sqcap \textsf{Férfi} \equiv \emptyset$

Következtetések egymásra való visszavezetése – példák

- A „Apa része Szülő” feladat átfogalmazásai:
  - $\neg$Szülő és Apa diszjunktak.
  - $\neg$Szülő $\sqcap$ Apa ekvivalens a $\perp$ fogalommal.
  - $\neg$Szülő $\sqcap$ Apa kielégíthetetlen.
- A „Szülő ekvivalens Apa $\sqcup$ Anya” átalakításai:
  - A Szülő $\sqcap$ $\neg$Apa $\sqcap$ $\neg$Anya, Apa $\sqcap$ $\neg$Szülő és Anya $\sqcap$ $\neg$Szülő fogalmak mind kielégíthetetlenek.
  - Szülő része Apa $\sqcup$ Anya és Apa $\sqcup$ Anya része Szülő
  - $\neg$Szülő és Apa $\sqcup$ Anya diszjunktak, valamint
    Szülő és $\neg$Apa $\sqcap$ $\neg$Anya is diszjunktak

Következtetések egymásra való visszavezetése – általános módszerek

- Ha van egy módszerünk a tartalmazás eldöntésére ($\mathcal{AL}$ esetén is alkalmazható):
  - C kielégíthetetlen $\Longleftrightarrow$ C része $\perp$ -nak
  - C és D ekvivalens $\Longleftrightarrow$ C része D-nek és D része C-nek
  - C és D diszjunkt $\Longleftrightarrow$ $C \sqcap D$ része $\perp$-nak
- Ha van egy módszerünk a kielégíthetőség eldöntésére (csak $\mathcal{ALC}$-től kezdve alkalmazható)
  - C része D-nek $\Longleftrightarrow$ $C \sqcap \neg D$ kielégíthetetlen
  - C és D ekvivalens $\Longleftrightarrow$ $(C \sqcap \neg D)$ és $(D \sqcap \neg C)$ is kielégíthetetlen
  - C és D diszjunkt $\Longleftrightarrow$ $C \sqcap D$ kielégíthetetlen
- A kielégíthetőséget egyszerűbb vizsgálni (csak egy fogalom van)
  - $\mathcal{AL}$ esetén: tartalmazás-vizsgálati algoritmus (ún. structural subsumption algorithm)
  - $\mathcal{ALC}$ és erősebb nyelvek esetén: kielégíthetőség-vizsgálati algoritmusok (tabló-algoritmus)

Az A-doboz

- A világban jelenlevő objektumok reprezentálására egy új névfajtát vezetünk be, az *egyedneveket*. jelölésük, a, b, c stb.
- Az adatdoboz (A-doboz) adatállításokat tartalmaz, ezek lehetnek:
  - fogalmi állítások: $C(a)$, pl. Apa(PÉTER).
  - szerepállítások: $R(a, b)$, pl. barátja(PÉTER,PÁL).
- Példa:

FiúsAnya(MARI)	Apa(PÉTER)
gyereke(MARI,PÉTER)	gyereke(PÉTER,TAMÁS)
gyereke(MARI,PÁL)	

- $\mathcal{I}$ interpretációs függvényt ki kell bővíteni: minden a egyednévhez $\mathcal{I}$ hozzárendel egy neki megfelelő $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ elemet
- $\mathcal{I}$ kielégíti a $C(a)$ fogalmi állítást ($\mathcal{I} \models C(a)$), csakkor ha $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$,
- $\mathcal{I}$ kielégíti a $R(a, b)$ szerepállítást ($\mathcal{I} \models R(a, b)$), csakkor, ha $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$.

Az A-doboz (folyt.)

- Az A-doboz hasonlít egy relációs adatbázisra, amelyben csak egy- és kétoszlopú táblák vannak. De az adatbázisoknál megszokott "zárt világ szemantika" helyett az A-dobozra a "nyílt világ szemantika" jellemző: a tudásbázis nem teljes, amit nem tudunk (nincs benne explicit módon az A-dobozban) az nem feltétlenül hamis!
- Egyedi nevek (UNA - Unique Name Assumption)
  - Ha feltesszük az UNA-t, akkor elvárjuk azt, hogy az egyednevek értelmezése páronként különböző legyen.
  - Nem mindig szükséges az UNA.

Következtetések A-dobozon

- A-doboz konzisztencia
  - Egy $\mathcal{A}$ A-doboz akkor konzisztens egy $\mathcal{T}$ T-doboz felett, ha létezik egy olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, amely modellje $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{T}$-nek egyszerre. Például, az $\{$Anya(MARI),Apa(MARI)$\}$ A-doboz konzisztens az üres T-dobozzal, viszont inkonzisztens a családi kapcsolatokat leíró T-dobozzal.
  - Egy ciklusmentes T-doboz feletti A-doboz-következtetések visszavezethetők egy kiterjesztett A-dobozon való következtetésre. (A ciklusmentes T-doboz itt is kiküszöbölhető).
- Definíció: $\mathcal{A} \models_{\mathcal{T}} \alpha$: Az $\mathcal{A}$ A-dobozból a $\mathcal{T}$ T-doboz felett következik az α állítás: ha minden $\mathcal{A}$-t és $\mathcal{T}$-t kielégítő interpretáció ($\mathcal{A}$ és $\mathcal{T}$ minden közös modellje), biztosan kielégíti α-t.

További következtetések A-dobozokon

- *Példányvizsgálat* (*instance check*): egy α adatállítás következménye-e egy $\mathcal{A}$ adatdoboznak (jelölése: $\mathcal{A} \models_c iT\alpha$). Példa: igaz-e, hogy $(\mathsf{Ember} \sqcap \neg\mathsf{Nőnemű} \sqcap \exists\mathsf{gyereke}.\top)(\mathsf{MIKLÓS})$, azaz Miklós apa-e?
$$\mathcal{A} \models C(a) \iff \mathcal{A} \cup \{\neg C(a)\} \text{ \textit{inkonzisztens}}$$
- *Példánykikeresés* (*instance retrieval*): egy adott C fogalomkifejezéshez meg kell állapítani, hogy mely egyednevek tartoznak *biztosan* az adott fogalomba. Példa: mik a példányai az $\mathsf{Ember} \sqcap \neg\mathsf{Nőnemű}$ (azaz a „férfi”) fogalomnak?
- *Egyed-realizáció* (*realisation*): adott egyedhez meg kell keresni azt a legszűkebb fogalmat, amelynek biztosan példánya (több ilyen minimális fogalom is lehetséges).
- *Fogalom-kielégíthetőség* A tisztán terminológiai következtetés visszavezethető A-doboz feladatra: C *kielégíthető* ($\mathcal{T}$ felett) $\iff$ $\{C(a)\}$ adatdoboz *konzisztens* ($\mathcal{T}$ felett)

Nyílt és zárt világ szemantikák

- egy adatállítás jelentése: gyereke(PÉTER,PÁL)
  - Adatbázis esetén (zárt világ szemantika): Péternek egyetlen gyermeke van, Pál
  - A-doboz esetén (nyílt világ szemantika): Péternek van egy Pál nevű gyermeke. Ha emellett még azt is közölni szeretnénk, hogy Harry az egyetlen gyermeke, akkor hozzá kell adnunk az A-dobozhoz a következő állítást is: $(\leqslant 1\text{gyereke})(\text{PÉTER})$.
- Az Oidipusz példa:

gyereke(IOKASZTÉ,OIDIPUSZ)	gyereke(IOKASZTÉ,POLÜNEIKÉSZ)
gyereke(OIDIPUSZ,POLÜNEIKÉSZ)	gyereke(POLÜNEIKÉSZ,THERSZANDROSZ)
Apagyilkos(OIDIPUSZ)	¬ Apagyilkos(THERSZANDROSZ)

- Erre az $\mathcal{A}_{OI}$ A-dobozra vonatkozóan az alábbi kérdést szeretnénk feltenni:

  Van-e Iokaszténak olyan gyermeke, aki apagyilkos, és akinek van egy gyermeke, aki nem apagyilkos?

  azaz:

$$\mathcal{A}_{OI} \models (\exists\text{gyereke}.(\text{Apagyilkos} \sqcap \exists\text{gyereke}.\neg\text{Apagyilkos}))(\text{IOKASZTÉ})?$$

- A válasz: igen, de a bizonyításhoz eset-szétválasztás szükséges!

Fejlettebb leíró logikák: a (D) nyelvkiterjesztés (konkrét tartományok)

- Nagykorú (ember) fogalma: 18 évnél idősebb ember.
- Kisérlet $\mathcal{SHIQ}$-beli megfogalmazásra:

$$\begin{aligned}\text{Nagykorú} &\equiv \text{Ember} \sqcap \exists \text{életkora}.\text{FelnőttKor}\\ \text{FelnőttKor} &\sqsubseteq \text{Életkor}\\ \text{Életkor} &\sqsubseteq \text{TermészetesSzám}\end{aligned}$$

- Ez kényelmetlen, pontatlan, jobb lenne ha az életkora szerep értékkészlete a természetes számok egy részhalmaza lehetne.
- Megoldás: a nyelv bővítése konkrét tartományokkal (adattípusokkal), pl. $\mathcal{SHIQ}(\mathbf{D})$
  - Például egy konkrét tartomány lehet a természetes számok
  - Új szimbolumok (szintaktikus elemek): adattípus-jel, pl.

$$\mathbf{D} = \{\mathsf{intv}_{i,j} \mid i \leq j \text{ természetes szám}\}$$

  - A jelek szemantikája:

$$\mathsf{intv}_{i,j}^{\mathbf{D}} = \{k \mid i \leq k \leq j\}$$

Fejlettebb leíró logikák: Egyedfogalmak (Nominals)

- Egyedfogalom (nominal): olyan fogalom, amelynek egyetlen példánya lehet. Rövidítése: $\mathcal{O}$
- Példa: földrajzi ontológia: Kontinens, Ország stb. fogalmak, helye szerep, EurópaiOrszág $\equiv \exists$helye.Európa. – itt Európa egy egyedfogalom.
- Fontos-e Európa-ról kikötni, hogy csak egyetlen példánya lehet?
  - Mondjuk ki, hogy a konkrét kontinensek diszjunktak és uniójuk a Kontinens fogalom:

$$\begin{aligned} \mathsf{Kontinens} &\equiv \mathsf{Európa} \sqcup \mathsf{Ázsia} \sqcup \mathsf{Amerika} \sqcup \cdots \\ \mathsf{Európa} \sqcap \mathsf{Ázsia} &\sqsubseteq \bot \\ \mathsf{Európa} \sqcap \mathsf{Amerika} &\sqsubseteq \bot \ldots \end{aligned}$$

  - Definiáljuk a következő – általunk diszjunktnak gondolt – fogalmakat:

$$\begin{aligned} \mathsf{ÓriásOrszág} &\equiv (\geqslant 2\, \mathsf{helye}.\mathsf{Kontinens}) \\ \mathsf{EUOrszág} &\sqsubseteq \forall \mathsf{helye}.\mathsf{Európa} \end{aligned}$$

  - Csak akkor bizonyítható a diszjunktság, ha tudjuk, hogy Európa egyedfogalom.
- Egyedfogalmak jelölése deklarációval: Indiv(Európa)
- Egyedfogalmak jelölése használatkor: EurópaiVállalat $\equiv \forall$telephelye.$\forall$helye.$\{$Európa$\}$
  Eurázsia $\equiv \{$Európa,Ázsia$\} \Longrightarrow$ Eurázsia $\equiv \{$Európa$\} \sqcup \{$Ázsia$\}$

Fejlettebb leíró logikák: További nyelvkiterjesztések

- Szerepkonstruktorok

Elnevezés	Szintaxis	Szemantika
Univerzális szerep	U	$\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$
Metszet	$R_1 \sqcap R_2$	$R_1^{\mathcal{I}} \cap R_2^{\mathcal{I}}$
Unió	$R_1 \sqcup R_2$	$R_1^{\mathcal{I}} \cup R_2^{\mathcal{I}}$
Komplemens	$\neg R$	$\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \setminus R^{\mathcal{I}}$
Kompozíció	$R_1 \circ R_2$	$R_1^{\mathcal{I}} \circ R_2^{\mathcal{I}}$
Tranzitív lezárás	R^+	$\bigcup_{n \geq 1} \left(R^{\mathcal{I}}\right)^n$
Reflexív-tranzitív lezárás	R^*	$\bigcup_{n \geq 0} \left(R^{\mathcal{I}}\right)^n$
Szerepszűkítés	$R\vert_C$	$R^{\mathcal{I}} \sqcap \left(\Delta^{\mathcal{I}} \times C^{\mathcal{I}}\right)$
Azonosság	$id(C)$	$\{\langle d, d \rangle \mid d \in C^{\mathcal{I}}\}$

- Példák:

$$
\begin{aligned}
\text{nagyszülője} &\equiv \text{szülője} \circ \text{szülője} \\
\text{anyja} &\equiv \text{szülője}|_{\text{Nőnemű}} \\
\text{testvére} &\equiv (\text{szülője} \circ \text{gyereke}) \sqcap \neg id(\top) \\
\text{fia} &\equiv \text{gyereke}|_{\neg\text{Nőnemű}} \\
\text{őse} &\equiv \text{szülője}^{+} \\
\text{őseVagyMaga} &\equiv \text{szülője}^{*}
\end{aligned}
$$

- Sajnos a fejlettebb szerepkonstruktorok eldönthetetlenné teszik a logikát

Fejlettebb leíró logikák: A RIQ nyelv

- A szerepkompozíció speciális esetei fontosak lehetnek, pl.

$$\textsf{tulajdona} \circ \textsf{része} \sqsubseteq \textsf{tulajdona}$$

a tulajdon része is a tulajdonos birtokában van

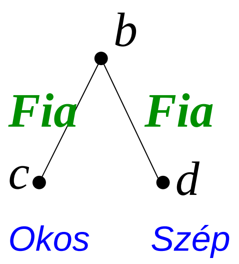
$$\textsf{helye} \circ \textsf{tartalmazója} \sqsubseteq \textsf{helye}$$

a betegség helyének tartalmazója is a betegség helyének tekintendő

- Megengedhetjük-e az $R \circ S \sqsubseteq T$ alakú axiómákat? Nem, ez eldönthetetlenné teszi a logikát . . .
- Ha megengedjük az $S \circ R \sqsubseteq S$ alakú axiómákat akkor a a belőle invertálással származtatható $R \circ S \sqsubseteq S$ alakot is meg kell engedni.
- Megengedhetjük-e az $S \circ R \sqsubseteq S$ és $R \circ S \sqsubseteq S$ alakú axiómákat? Még mindig eldönthetetlen . . .
- A $\mathcal{RIQ}$ nyelv: a $\mathcal{SHIQ}$ nyelvet kiterjeszti $S \circ R \sqsubseteq S$ és $R \circ S \sqsubseteq S$ alakú axiómákkal, egy speciális feltétellel: szereptartalmazási szempontból ciklusmentesnek kell lennie a T-doboznak.
- A $\mathcal{RIQ}$ nyelv eldönthető.

Tabló algoritmusok leíró logikákban

- Az alapelvek:
  - Kielégíthetőséget vizsgálunk, konstruktív módon megpróbálunk modellt építeni.
  - Negált normálalakból indulunk ki: negáció ($\neg$) csak atomi fogalmak előtt fordulhat elő.
  - A modell építésekor következtetési szabályokat alkalmazunk.
- Az épített modell
  - egy olyan gráf, amelynek élei és csomópontjai is címkézettek
  - a gráf csomópontjai alkotják az interpretáció alaphalmazát
  - a gráf élein szerepek vannak címkeként (ezzel definiáltak a szerepek)
  - a gráf csomópontjai fogalomkifejezésekkel címkézettek, speciálisan egy adott atomi fogalomnévvel címkézett csomópontok definiálják ezt a fogalmat
- Példa: $(\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \overset{?}{\sqsubseteq} \exists Fia.(O \sqcap Sz)$
  (O = okos, Sz = szép)
- Átfogalmazás: kielégíthető-e:
  $(\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \sqcap \neg(\exists Fia.(O \sqcap Sz))$

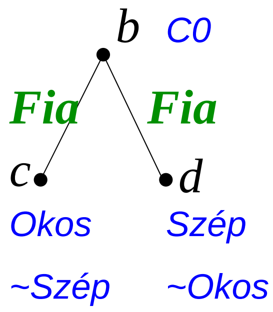


Tabló algoritmus - $\mathcal{ALC}$ példa

- Kérdés: Akinek van szép fia is és okos fia is, annak biztosan van-e olyan fia aki szép és okos is?
- LL-kérdés: $(\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \overset{?}{\sqsubseteq} \exists Fia.(O \sqcap Sz)$ (O = okos, Sz = szép)
- Átfogalmazás: kielégíthető-e $(\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \sqcap \neg(\exists Fia.(O \sqcap Sz))$
  ($C \sqsubseteq D \Leftrightarrow C \sqcap \neg D$ *nem kielégíthető.*)
- Negált normálalak: $C_0 = (\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \sqcap \forall Fia.(\neg O \sqcup \neg Sz)$
- Cél: olyan véges $\mathcal{I}$ interpretáció, amelyben $C_0^{\mathcal{I}} \neq 0$. Tehát létezik b objektum, amelyre $b \in (\exists Fia.O)^{\mathcal{I}}, b \in (\exists Fia.Sz)^{\mathcal{I}}$, és $b \in (\forall Fia.(\neg O \sqcup \neg Sz))^{\mathcal{I}}$.
- $b \in (\exists Fia.O)^{\mathcal{I}}$-ből következik, hogy létezik egy olyan c objektum, amelyre $\langle\, b, c \,\rangle \in Fia^{\mathcal{I}}$ és $c \in O^{\mathcal{I}}$. Ugyanígy $b \in (\exists Fia.Sz)^{\mathcal{I}}$ miatt létezik d, amelyre $\langle\, b, d \,\rangle \in Fia^{\mathcal{I}}$ és $d \in Sz^{\mathcal{I}}$.
- Mivel b-nek ki kell elégítenie $\forall Fia.(\neg O \sqcup \neg Sz)$-t, és c illetve d Fia relációban állnak b-vel, újabb korlátokat kell felvennünk: $c \in (\neg O \sqcup \neg Sz)^{\mathcal{I}}$ és $d \in (\neg O \sqcup \neg Sz)^{\mathcal{I}}$.
- $c \in (\neg O \sqcup \neg Sz)^{\mathcal{I}}$ azt jelenti, hogy $c \in (\neg O)^{\mathcal{I}}$ vagy $c \in (\neg Sz)^{\mathcal{I}}$. Ha feltesszük, hogy $c \in \neg O^{\mathcal{I}}$, akkor ez ellentmond $c \in O^{\mathcal{I}}$-nek. Tehát kénytelenek leszünk $c \in (\neg Sz)^{\mathcal{I}}$-t választani. Ugyanígy $d \in (\neg O \sqcup \neg Sz)^{\mathcal{I}}$-t kielégítendő, fel kell vennünk $d \in (\neg O)^{\mathcal{I}}$-t.
- C_0-ra kaptunk egy modellt: $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}; Fia^{\mathcal{I}} = \{\langle\, b, c \,\rangle, \langle\, b, d \,\rangle\}; O^{\mathcal{I}} = \{c\}$ és $Sz^{\mathcal{I}} = \{d\}$. Tehát C_0 kielégíthető, azaz $(\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz)$ nem részfogalma $\exists Fia.(O \sqcap Sz)$-nek.

Tabló algoritmus - kiterjesztett ($\mathcal{ALCN}$) példa

- Kérdés: Akinek legfeljebb egy fia van, van szép fia is és van okos fia is, annak biztosan van-e olyan fia aki szép és okos is?
- LL-kérdés: $(\leqslant 1 Fia) \sqcap (\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \overset{?}{\sqsubseteq} \exists Fia.(O \sqcap Sz)$
- Átfogalmazás: kielégíthető-e $(\leqslant 1 Fia) \sqcap (\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \sqcap \neg(\exists Fia.(O \sqcap Sz))$
- Negált normálalak: $C_0 = (\leqslant 1 Fia) \sqcap (\exists Fia.O) \sqcap (\exists Fia.Sz) \sqcap \forall Fia.(\neg O \sqcup \neg Sz)$
- Az előző példához hasonló módon létrehozzuk az alábbi tablót:



- $(\leqslant 1 Fia)(b)$, valamint $Fia(b, c)$, $Fia(b, d)$ miatt $c = d$ kell legyen, de az így kapott objektum címkéjében két ütközés is van
- Ezzel bebizonyítottuk, hogy C_0-nak nem lehet modellje, tehát a fenti kérdésre *igen* a válasz.

A tabló algoritmus használata adatkövetkeztetésre

- Az adatdoboz állításai feszítik ki a tabló kiindulási gráfját
- Példánykikeresés: eldöntendő, hogy egy $C(a)$ következik-e az adatdobozból
  - hozzávesszük az adatdobozhoz a $(\neg C)(a)$ állítást
  - a kapott adatdoboz inkonzisztens $\Leftrightarrow$ az eredeti adatdobozból következik $C(a)$
- Példányvizsgálat: megállapítandó azon a egyednevek halmaza, amelyekre $C(a)$ következik az adatdobozból
  - minden az adatdobozban előforduló a egyednévre elvégezzük a példánykikeresési feladatot
  - nagyon rossz hatékonyságú módszer …